E.S.E.O. - E.S.T.I.T. - H.E.I. - I.C.A.M. - I.S.E.N. - I.S.E.P.

CONCOURS D'ENTREE EN 1re ANNEE DU CYCLE INGENIEURS 1987

Série T

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

La composition comporte quatre exercices INDEPENDANTS.

Exercice n°1

Soit le système linéaire de quatre équations à quatre inconnues réelles (x,y,z,t) :

$$S_1 \begin{cases} ax + by + z = a + b \\ bx + ay + t = a - b \\ x + az + bt = a + 1 \\ y + bz + at = a - 1 \end{cases} \qquad \text{où } (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

1. Calculer la matrice A associée à (S_1) et son déterminant.

2. Préciser le cas où le système admet une solution unique ; expliquer comment on peut trouver la solution (x,y,z,t) sans la calculer explicitement.

3. Montrer que le système (S_1) est équivalent au système :

$$S_2 \begin{cases} (a + b + 1)(x + y + z + t) = 4a \\ (a + b - 1)(x + y - z - t) = 0 \\ (a - b + 1)(x - y + z - t) = 2b + 2 \\ (a - b - 1)(x - y - z + t) = 2b - 2 \end{cases}$$

4. On rapporte le plan au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$: O désigne l'origine des axes, $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée directe.
   M est un point générique du plan de coordonnées (a,b) donc $\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j}$.
   Discuter selon la position de M dans le plan, le rang du systeme (S_1), l'existence des solutions et la dimension de l'espace des solutions.

Exercice n°2

1. On considère l'équation différentielle : $2xy' - y = \frac{x}{1+x}$ (où x est une variable réelle et y une fonction réelle de x).
   Déterminer sur chaque intervalle $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, +\infty[$, la forme générale des solutions de cette équation.

2. a. Montrer que l'équation admet une solution unique sur $]-1, +\infty[$ que l'on notera f.

   b. Existe-t-il des solutions sur $]-\infty, 0[$ pour l'équation $(1+x)[2xy' - y] = x$?

3. Montrer que f est développable en série entière sur un intervalle $]-R, +R[$ que l'on précisera. Donner le développement de f en série entière.

Exercice n°3

On rapporte le plan au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient le point A(a,0) avec a réel strictement positif, une parabole $\mathcal{P}$ de foyer O et le cercle C de centre A et de rayon $\|\overrightarrow{OA}\|$.

1. Montrer que : A appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si la directrice de $\mathcal{P}$ est tangente à C.

2. Soit un point M de C tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AM}) = \theta$. Déterminer en fonction de θ l'équation de la tangente en M à C.

3. Montrer que l'ensemble des sommets des paraboles $\mathcal{P}$ de foyer O passant par A est une courbe d'équation polaire : $\rho = \frac{a}{2}(1 + \cos\theta)$.
   (l'axe de référence étant $(O,\vec{i})$).

4. Etudier et représenter graphiquement la courbe d'équation polaire $\rho = \frac{a}{2}(1 + \cos\theta)$.

Tournez la page S.V.P.

Exercice n°4

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels.

$\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels privé de l'élément 0.

On pose : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $n_k = 2^{(2^k)}$ et $N_k = 2\, n_k$.

1. Soit h la fonction réelle d'une variable réelle x, impaire, 2π périodique, égale à $\left(\frac{x - \pi}{2}\right)$ sur l'intervalle $]0,\pi]$.

   a. Déterminer ses coefficients de Fourier a_k, b_k.

   b. Quelle est la somme de sa série de Fourier :

$$S(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) .$$

2. Soient les fonctions :

$$\forall (n,N) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : \quad Q(x, N, n) = (2 \sin Nx) \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} .$$

   a. Montrer que :

$$Q(x, N, n) = \frac{\cos (N-n)\, x}{n} + \frac{\cos(N-(n-1))x}{n-1} + \ldots + \frac{\cos (N-2)x}{2} + \frac{\cos (N-1)\, x}{1} \ldots$$

$$\ldots - \frac{\cos (N+1)x}{1} - \frac{\cos (N+2)x}{2} - \ldots - \frac{\cos(N+(n-1))x}{n-1} - \frac{\cos (N+n)x}{n} .$$

   b. Quelle est la série de Fourier de Q(x,N,n) ?

Dans toute la suite on pourra admettre et utiliser le résultat suivant :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in \mathbb{R} \quad \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} \right| \leq M$$

---

3. Soit la suite de fonctions $(f_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ telle que : $f_k(x) = \frac{1}{2^k}\, Q(x, N_k, n_k)$.

   Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$$

   a. Montrer que cette série de fonctions converge normalement sur $\mathbb{R}$ et que f est continue, 2π périodique, paire.

   b. D'après 2.a) f_k est un polynôme trigonométrique tel que si $I_k = [N_k - n_k, N_k + n_k]$: $f(x) = \sum_{n \in I_k \cap \mathbb{N}} \alpha_n \cos nx$.

   Montrer que ces intervalles I_k sont disjoints.

4. En notant $a_n(\varphi)$, $b_n(\varphi)$ les coefficients de Fourier d'une fonction φ, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_n(f_k)$$

un seul terme au plus de la série étant non nul.
En déduire que la série de Fourier de f s'obtient en "mettant bout à bout" les développements des f_k.

5. Soit S_n la n^e somme partielle de la série de Fourier de f en 0. Montrer que :

$$\left| S_{N_k + n_k} - S_{N_k} \right| = \frac{1}{2^k} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n_k}\right) \geq \frac{1}{2^k} \ln (n_k)$$

(On pourra utiliser une intégrale pour établir l'inégalité)
En déduire que cette série diverge.
